

UE IST-451 - SI

Examen - le 7 janvier 2008

Tous documents interdits, y compris calculatrice et téléphone portable.

Les notations doivent impérativement être respectées. Les réponses aux questions doivent être clairement argumentées mais concises. Les différents exercices sont indépendants, de même que de nombreuses questions.

Exercice 1 : Variables aléatoires (sur environ 4 points)

On considère tout d'abord une variable aléatoire (VA) X scalaire, réelle, gaussienne, de moyenne m_X et d'écart type σ_X .

1/ Rappeler l'expression de sa densité de probabilité (ddp).

Soient X et Y deux VA scalaires, réelles, gaussiennes, indépendantes, centrées et d'écart type égal à 1.

2/ Expliciter leur ddp conjointe.

3/ On considère la VA $Z = XY$. Expliciter sa valeur moyenne.

4/ On considère la VA $Z = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$. Expliciter sa moyenne ainsi que son écart type.

5/ Expliciter la ddp du couple aléatoire $\left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}}, \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right)$.

Soient X et Y deux VA scalaires, réelles, gaussiennes dans leur ensemble, centrées, d'écart type égal à 1 et de coefficient de corrélation ρ . On considère le vecteur aléatoire $Z = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}.$$

6/ Expliciter la ddp du vecteur aléatoire Z .

Exercice 2 : Signaux aléatoires (sur environ 4 points)

1/ Rappeler la définition d'un signal aléatoire (SA) stationnaire au sens strict.

2/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire au sens large.

Soit $x(t)$ un signal aléatoire (SA) centré, scalaire, réel, stationnaire au sens strict, de fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$, de puissance finie et de densité spectrale de puissance (dsp) $\Gamma_{xx}(f)$.

3/ Expliciter $E[x(t)]$.

4/ Rappeler la définition de $\gamma_{xx}(\tau)$ puis celle de $\Gamma_{xx}(f)$.

5/ Exprimer la puissance d'un SA stationnaire en fonction de sa corrélation puis en fonction de sa dsp.

On considère le SA $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence certaine.

6/ Expliciter la fonction d'autocorrélation du SA $y(t)$.

7/ Ce SA est-il stationnaire au sens large ?

On considère le SA $z(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + j x(t) \sin(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence certaine.

8/ Expliciter la valeur moyenne du SA $z(t)$

9/ Ce SA est-il stationnaire au sens large ?

10/ Expliciter la dsp du SA $z(t)$ en fonction de $\Gamma_{xx}(f)$.

Exercice 3 : Estimation (sur environ 10 points)

On considère deux variables aléatoires (VA) X et B , scalaires, réelles, indépendantes, centrées et gaussiennes, d'écart type respectif σ_X et σ_B .

1/ Expliciter $f_B(b)$, densité de probabilité (ddp) de la VA B .

2/ Expliciter $f_{XB}(x,b)$, ddp conjointe des VA X et B .

On considère également la VA $Y = X + B$.

3/ Expliciter $f_{Y/X=x}(y)$, ddp conditionnelle de la VA Y sachant que la VA X est fixée et égale à x .

4/ Donner l'expression de x qui maximise $f_{Y/X=x}(y)$ à y donné et est encore l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance (MV) de X . Expliciter l'erreur d'estimation, le biais moyen ainsi que l'écart type de l'erreur d'estimation de l'estimateur au sens du MV.

5/ En déduire l'expression de $f_{X/Y=y}(x)$, ddp conditionnelle de la VA X sachant que Y est fixé et égal à y (il n'est pas demandé d'explicitier les termes indépendants de x).

6/ Donner l'expression de x qui maximise $f_{X/Y=y}(x)$ à y donné et est encore l'estimateur au sens du maximum *a posteriori* (MAP) de X . Expliciter l'erreur d'estimation, le biais moyen ainsi que l'écart type de l'erreur d'estimation de l'estimateur au sens du MAP.

7/ On démontre que $f_{X/Y=y}(x)$ est une ddp gaussienne. Expliciter la moyenne conditionnelle suivante $E[X/Y=y]$ (rq : il n'est pas nécessaire de faire le calcul de l'intégrale). Conclure. On démontre que $E[X/Y=y]$ est encore l'estimateur bayésien avec un coût quadratique (MQ).

Soient $x(t)$ et $b(t)$ deux signaux aléatoires, scalaires, réels, stationnaires, indépendants, centrés et gaussiens, d'écart type connu noté respectivement σ_x et σ_b . On observe uniquement leur somme $y(t) = x(t) + b(t)$.

8/ Dans le cas où la puissance du bruit est *faible*, proposer un estimateur empirique de $x(t)$.

9/ Dans le cas où la puissance du bruit est *grande*, proposer un estimateur empirique de $x(t)$.

10/ Quel est l'estimateur au sens du MV de $x(t)$?

11/ Expliciter l'estimateur au sens du MAP de $x(t)$.

12/ Quel est l'estimateur bayésien de $x(t)$ avec coût quadratique ?

13/ Comparer les estimateurs d'un point de vue biais et puissance de l'erreur d'estimation.

Exercice 4 : Filtrage 2D (sur environ 2 points)

Le tableau ci-dessous correspond à une partie d'une image codée en niveau de gris. Calculer l'image obtenue par application d'un filtre du médian 3×3 .

5	5	10	15	20
5	10	15	20	25
10	10	10	15	15
10	10	20	30	30
5	5	30	30	30

$X \in \mathbb{R} : \mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2) \quad 1/ f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right)$

$X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R} : \mathcal{N}(0,1) + \text{VA indépendantes}$

2/ $f_{X,Y}(x,y) \stackrel{\text{VA indépendantes}}{=} f_X(x) f_Y(y) \stackrel{\mathcal{N}(0,1)}{=} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

3/ $E[Z=XY] \stackrel{\mathcal{N}(0,1)}{=} E[X]E[Y] = 0$

4/ $E[Z = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} E[X-Y] \stackrel{\mathcal{N}(0,1)}{=} 0 = m_2$

$\sigma_2^2 = E[(Z-m_2)^2] = E[Z^2] = \frac{1}{2} E[X^2+Y^2-2XY] = 1 \rightarrow \sigma_2 = 1$

5/ X et Y \mathcal{N}^p + indépendants $\rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mathcal{N}^p$

$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X-Y \\ X+Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow Z \mathcal{N}^p \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2 \mathcal{N}^p$

$m_{Z_1} = m_{Z_2} = 0 \quad \sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2} = 1 \quad (\text{cf 4/}) \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2 : \mathcal{N}(0,1)$

$E[Z_1, Z_2 - m_{Z_1}, m_{Z_2}] = E[Z_1, Z_2] = \frac{1}{2} E[X^2 - Y^2] = 0 \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2$ sont décorrélés + $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \mathcal{N}^p \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2$ sont indépendants \rightarrow
 $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right)$ ou changement VA.

6/ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mathcal{N}^p + X$ et $Y : \mathcal{N}(0,1), \Gamma_{X,Y} = E\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : \mathcal{N}(0, \Gamma_{X,Y})$

$Z = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} : \mathcal{N}(0, \Gamma_{Z_2})$ avec $\Gamma_{Z_2} = E[Z_2 Z_2^T] = A \Gamma_{X,Y} A^T$
 $= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho\sqrt{1-\rho^2} & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1-\rho^2 & 0 \\ \rho\sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1-\rho^2 & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \Gamma_{Z_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2$ décorrélés avec $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \mathcal{N}^p \rightarrow Z_1, \text{ et } Z_2$ indépendants et $f_Z(z) = f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right)$

- 1/ SA stationnaire au sens strict \Leftrightarrow toutes ses caractéristiques sont indépendantes de l'origine des temps
- 2/ SA stationnaire au sens large $\Leftrightarrow \begin{cases} m_x(t) = m_x \quad \forall t \\ r_{xx}(t, t-\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = r_{xx}(\tau) \\ + E[|x(t)|^2] < \infty \end{cases}$
- 3/ $E[x(t)] = m_x(t) = m_x = 0$ car SA centré
- 4/ $r_{xx}(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)]$ $\Gamma_{xx}(f) = TF[r_{xx}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$
- 5/ $P_x = r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f) df$
- 6/ $r_{yy}(t, t-\tau) = \cos(2\pi f t) \cos(2\pi f (t-\tau)) r_{xx}(\tau)$
- 7/ $r_{yy}(t, t-\tau)$ est fonction de t et $(t-\tau) \rightarrow y(t)$ n'est pas un SA stationnaire au sens large
- 8/ $E[z(t)] = e^{j2\pi f t} m_x = 0$
 $z(t) = x(t) e^{j2\pi f t}$
- 9/ $\begin{cases} r_{zz}(t, t-\tau) = E[x(t) e^{j2\pi f t} x(t-\tau) e^{-j2\pi f (t-\tau)}] = e^{j2\pi f \tau} r_{xx}(\tau) = r_{zz}(0) \\ r_{zz}(0) = P_x < \infty \end{cases}$
 $\rightarrow z(t) =$ SA stationnaire au sens large.
- 10/ $\Gamma_{zz}(f) = TF[r_{zz}(\tau) e^{j2\pi f \tau}] = \Gamma_{xx}(f - f)$

-11-

Exercice 2 D

5	5	10	15	20
5	10	15	20	25
10	10	10	15	15
10	10	20	30	30
5	5	30	30	30

	10	10	15	
	10	15	20	
	10	15	30	

Estimation

1/ $B: \mathcal{D}^P(0, \sigma_B^2)$ $f_B(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{b^2}{\sigma_B^2}\right)$

2/ $+ X: \mathcal{D}^P(0, \sigma_X^2)$
 $+ X \text{ et } B \text{ indépendants}$ } $\Rightarrow f_{XB}(x,b) = f_X(x) f_B(b)$
 $= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{b^2}{\sigma_B^2}\right)\right)$

3/ $Y = X+B$ $+ X=x \Rightarrow B \rightarrow Y=x+B : \mathcal{D}^P(x, \sigma_B^2) \Rightarrow$
 $f_{Y/X=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2}\right)$ car X et B indépendants

- 4/ $f_{Y/X=x}(y)$ maximum pour $x=y \rightarrow \hat{X}_{MV} = Y$
 • erreur d'estimation $= \tilde{X} = \hat{X} - X \rightarrow \tilde{X}_{MV} = Y - X = B \rightarrow E[\tilde{X}_{MV}] = 0$
 \rightarrow biais moyen nul \rightarrow estimateur non biaisé
 • $\sigma_{\tilde{X}_{MV}}^2 = E[\tilde{X}_{MV}^2] = E[B^2] = \sigma_B^2 \rightarrow \sigma_{\tilde{X}_{MV}} = \sigma_B$

5/ $f_{X/Y=y}(x) = f_{Y/X=x}(y) \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} = c \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2} + \frac{x^2}{\sigma_X^2}\right)\right)$
 ↑
 indépendant des

6/ $f_{X/Y=y}(x)$ maximum $\Leftrightarrow J = \frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2} + \frac{x^2}{\sigma_X^2}$ minimum

CNS $\frac{dJ}{dx} = 0$, or $\frac{dJ}{dx} = -2 \frac{y-x}{\sigma_B^2} + 2 \frac{x}{\sigma_X^2} \rightarrow x = \frac{y/\sigma_B^2}{\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}} \rightarrow$

$\hat{X}_{MAP} = \frac{\frac{y}{\sigma_B^2}}{\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}$

• $\tilde{X}_{MAP} = \frac{(X+B)/\sigma_B^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2} - X = \frac{B/\sigma_B^2 - X/\sigma_X^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2} \rightarrow E[\tilde{X}_{MAP}] = 0 \rightarrow$
 estimateur non biaisé

• $\sigma_{\tilde{X}_{MAP}}^2 \uparrow \left(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)^{-1} \rightarrow$
 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\tilde{X}_{MAP}} < \sigma_X \\ \sigma_{\tilde{X}_{MAP}} < \sigma_B \end{array} \right.$
 X et B indépendants

7/ X et Y \mathcal{D}^P + indépendants $\rightarrow \binom{X}{Y} \mathcal{D}^P$ et $f_{Y/X=x}(y): \mathcal{D}^P$
 $f_{X/Y=y}(x): \mathcal{D}^P$

- Soit $m_{X/Y} = E[X/Y=y]$
- $f_{X/Y=y}(x) = c' \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - m_{X/Y})^2}{\sigma_{X/Y}^2}\right)$

D'après 5/ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_{X/Y}^2} = \frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \\ -\frac{2xy}{\sigma_{X/Y}^2} = -\frac{2xm_{X/Y}}{\sigma_{X/Y}^2} \end{array} \right\} \rightarrow m_{X/Y} = \frac{y/\sigma_B^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2}$
 $\hat{X}_{\dots} = \hat{X}_{\dots}$

8/ $y(k) = x(k) + b(k) \stackrel{\uparrow}{=} x(k)$ → $\hat{x}_1(k) = y(k)$ → on n'exploite que les observations
 bruit "faible"

9/ $y(k) = x(k) + b(k) \stackrel{\uparrow}{=} b(k)$ → $\hat{x}_2(k) = m_x = 0$ → on n'exploite que l'a priori
 bruit "grand"

10/ $\hat{x}_{MV}(k) \stackrel{\uparrow}{=} y(k) = \hat{x}_1(k)$
 4/

11/ $\hat{x}_{MAP}(k) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{y(k)/\sigma_b^2}{1/\sigma_x^2 + 1/\sigma_b^2} = \frac{y(k)/\sigma_b^2 + m_x/\sigma_x^2}{1/\sigma_b^2 + 1/\sigma_x^2} = \text{barycentrique}$
 6/ → prend en compte les observations + a priori, avec pondération fonction de la précision

12/ $\hat{x}_{MQ}(k) \stackrel{\uparrow}{=} \hat{x}_{MAP}(k)$
 6/

13/ • $\hat{x}_{MQ}(k) = \hat{x}_{MAP}(k)$

• Tous les estimateurs sont non biaisés

• $\sigma_{MAP} < \sigma_{MV}$

→ MAP = MQ meilleur que MV.

UE IST-451 – SI

Examen partiel – le 8 novembre 2007
Tous documents interdits, y compris calculatrice et téléphone portable.

Les notations doivent impérativement être respectées. Les réponses aux questions doivent être clairement argumentées mais concises. Les différents exercices sont indépendants, de même que certaines questions.

Exercice 1 : Variables aléatoires

On considère tout d'abord une variable aléatoire (VA) X gaussienne, scalaire, réelle, de moyenne m et d'écart type σ .

1/ Rappeler l'expression de sa densité de probabilité (ddp).

Dans toute la suite, on considère deux VA X et Y gaussiennes, scalaires, réelles, centrées et de même écart type σ . On suppose de plus que ces VA sont indépendantes.

2/ Expliciter la ddp conjointe $f_{XY}(x, y)$ des VA X et Y (rappel : tous les résultats doivent être justifiés).

3/ On pose $Z = (X \ Y)^T$. En déduire l'expression de la ddp $f_Z(z)$ de la VA Z .

À partir des VA X et Y définies précédemment, on construit la VA scalaire et complexe $Z = X + jY$ (avec $j^2 = -1$).

4/ Expliciter la moyenne ainsi que l'écart type σ_Z de la VA Z .

5/ Expliciter la ddp de la VA Z uniquement en fonction de z et σ_Z . On dit que la VA Z est gaussienne circulaire.

On suppose de plus les VA X et Y sont réduites (moyenne nulle et écart type unitaire) et on considère maintenant la VA $Z = \frac{Y}{X}$ avec $X \neq 0$.

6/ Expliciter $F_Z(z)$, fonction de répartition de la VA Z , en fonction de la notion de probabilité en faisant intervenir les VA X et Y .

7/ Représenter dans le plan l'ensemble des couples (X, Y) conduisant à une valeur de $Z = \frac{Y}{X} < z$.

8/ En déduire tout d'abord une expression intégrale de $F_Z(z)$ en fonction de $f_{XY}(x, y)$.

9/ Exprimer tout d'abord $f_Z(z)$, ddp de la VA Z , en fonction de $F_Z(z)$.

10/ En déduire l'expression de $f_Z(z)$.

11/ Vérifier que $f_Z(z)$ est bien normalisée.

12/ Que peut-on dire de la moyenne de la VA Z ?

L'expression de $f_Z(z)$ va être retrouvée en considérant le changement de VA suivant :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Z = \frac{Y}{X} \end{pmatrix}.$$

13/ Exprimer tout d'abord $f_{XZ}(x, z)$, ddp du couple aléatoire (X, Z) , en fonction de la ddp du couple (X, Y) .

14/ Expliciter $f_{XZ}(x, z)$.

15/ Exprimer $f_Z(z)$ en fonction de $f_{XZ}(x, z)$.

16/ Retrouver l'expression de $f_Z(z)$.

Exercice 2 : Signal aléatoire

- 1/ Rappeler la définition d'un signal aléatoire (SA) stationnaire au sens strict.
- 2/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire au sens large.
- 3/ Donner un exemple de SA stationnaire au sens large.
- 4/ Donner un exemple de SA qui n'est pas stationnaire.
- 5/ Rappeler la définition d'un SA ergodique.
- 6/ Rappeler la définition d'un SA ergodique à l'ordre deux.
- 7/ Donner un exemple de SA qui est ergodique à l'ordre deux.
- 8/ Donner un exemple de SA qui n'est pas ergodique.

On considère dans la suite un SA scalaire.

9/ Rappeler la définition de la fonction d'autocorrélation d'un SA stationnaire ainsi que celle de sa densité spectrale de puissance (dsp).

10/ Exprimer la puissance d'un SA stationnaire en fonction de sa corrélation puis en fonction de sa dsp.

11/ Rappeler la formule des interférences (dans le cas général).

On considère un SA $e(t)$ stationnaire de dsp

$$\Gamma_{ee}(f) = \begin{cases} \Gamma_0 & \text{si } |f| < B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

12/ Quelle est la moyenne du SA $e(t)$?

13/ $e(t)$ s'exprimant en Volts et t en seconde, préciser l'unité de Γ_0 .

14/ Expliciter la puissance du SA $e(t)$.

Exercice 3 : Effet de Gigue

On appelle effet de gigue (jitter en anglais) les erreurs aléatoires dues aux fluctuations de la période d'échantillonnage. Le but de cette partie est d'étudier les effets de ce phénomène au niveau de la densité spectrale de puissance (dsp) des signaux échantillonnés. Dans le but de simplifier les calculs, l'étude va être menée avec un signal scalaire, harmonique et d'amplitude aléatoire. De plus, on considère le signal analytique associé. Le signal à temps continu étudié est donc le suivant :

$$x(t) = A \exp(j2\pi f_0 t),$$

où t est une variable certaine, f_0 est une fréquence connue, et A est une variable aléatoire (VA) réelle et centrée de variance σ_A^2 .

1/ Expliciter tout d'abord la fonction d'autocorrélation de ce signal à temps continu puis sa dsp et représenter son évolution.

On considère le signal échantillonné ou encore à temps discret $x_n = x(nT_e)$, où la période d'échantillonnage T_e est certaine et vérifie $2f_0T_e < 1$. On rappelle que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi(f - f_0T_e)n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0T_e - n).$$

2/ Expliciter tout d'abord la fonction d'autocorrélation du signal à temps discret x_n puis sa dsp.

Modèle 1

Dans ce modèle de gigue, le n^e instant d'échantillonnage est $t_n = nT_e + \Delta_n$, où T_e est une grandeur certaine vérifiant $2f_0T_e < 1$ et les grandeurs Δ_n ($\forall n \in \mathbb{Z}$) sont des VA décrivant les erreurs d'échantillonnage. On suppose que les VA Δ_n sont uniformément réparties sur l'intervalle $[-\Delta, +\Delta]$ et deux à deux indépendantes. On suppose de plus que les VA A et Δ_n ($\forall n \in \mathbb{Z}$) sont indépendantes. Le signal échantillonné est alors $y_n = x(nT_e + \Delta_n)$.

3/ Expliciter tout d'abord la fonction caractéristique $\varphi_{\Delta}(u)$ de la VA Δ_n .

4/ Expliciter ensuite la fonction d'autocorrélation du signal à temps discret y_n puis sa dsp.

Modèle 2

Dans ce modèle de gigue, le n^e instant d'échantillonnage est $t_n = nT_e + \sum_{i=-\infty}^n \Delta_i$, où T_e est toujours une valeur certaine vérifiant $2f_0T_e < 1$ et les grandeurs Δ_n ($\forall n \in \mathbb{Z}$) sont des VA décrivant les erreurs d'échantillonnage, uniformément réparties sur l'intervalle $[-\Delta, +\Delta]$ et deux à deux indépendantes. On suppose toujours que les VA A et Δ_n ($\forall n \in \mathbb{Z}$) sont indépendantes. Le signal échantillonné est alors $z_n = x\left(nT_e + \sum_{i=-\infty}^n \Delta_i\right)$.

5/ Expliciter la fonction d'autocorrélation du signal à temps discret z_n puis sa dsp.

6/ Comparer les dsp obtenues avec les deux modèles.

UE IST-451 SI
Examen partiel du 2 novembre 2005
Durée 2 heures.

Tout document interdit, y compris calculatrice et téléphone portable.

Les notations doivent impérativement être respectées. Les réponses aux questions doivent être clairement argumentées mais concises. Les différents exercices sont indépendants, de même que certaines questions. Ce sujet comporte 3 pages. Toutes les variables aléatoires (VA) sont réelles et scalaires. La notation suivante est utilisée : $F_X(x) = \Pr[X < x]$ pour la fonction de répartition d'une VA X .

Exercice I : redresseur mono-alternance

Dans cet exercice, l'étude des propriétés statistiques de la sortie Y d'un redresseur mono-alternance (figure 1) d'entrée X continue est proposée. La diode du redresseur étant idéale (pas de tension de seuil), la relation liant l'entrée et la sortie est donnée par la fonction g , dont la caractéristique est représentée sur la figure 2 :

$$\begin{cases} y = g(x) = 0, & \text{si } x \leq 0 \\ y = g(x) = x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

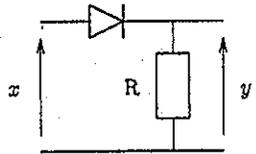


Figure 1 : Schéma du détecteur linéaire

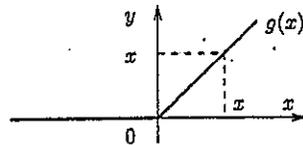


Figure 2 : Caractéristique

- 1 - Sans faire d'hypothèse sur la distribution de la variable aléatoire (VA) X , exprimer la fonction de répartition $F_Y(y)$ de la variable aléatoire Y en fonction de celle de X : $F_X(x)$.
- 2 - Exprimer $F_Y(0^-)$ et $F_Y(0^+)$.
- 3 - En déduire la densité de probabilité de Y , $f_Y(y)$ pour $y < 0$, puis pour $y > 0$.
- 4 - Préciser l'expression de $f_Y(y)$ en $y = 0$, en fonction de la probabilité $\Pr[X \leq 0]$. Puis donner $f_Y(y)$ en fonction de la valeur $\Pr[X \leq 0]$ et de la fonction f_X .
- 5 - Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) dy = 1$$

On considère que la VA X est gaussienne centrée. On désigne par σ_X son écart type.

- 6 - Expliciter la densité de probabilité $f_X(x)$ de la VA X .
- 7 - Donner la valeur numérique de $\Pr[X \leq 0]$. Expliciter la densité de probabilité $f_Y(y)$ de la VA Y . Représenter graphiquement son allure.
- 8 - Exprimer $E[Y]$, en fonction de σ_X .
- 9 - Exprimer $E[Y^2]$, en fonction de σ_X .
- 10 - En déduire la variance de la VA Y en fonction de l'écart type σ_X .

Exercice II : Autocorrélation d'un limiteur saturé

Soit X une variable aléatoire (VA) gaussienne centrée d'écart type σ .

- 11 - Exprimer $E[X]$.
- 12 - Exprimer la densité de probabilité $f_X(x)$ de X .
- 13 - Exprimer les probabilités : $\Pr[X < 0]$, $\Pr[X > 0]$ et $\Pr[X = 0]$.

Soit la VA Y , définie par :

$$Y = \text{signe}(X) = \begin{cases} +1, & \text{si } X \geq 0 \\ -1, & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

- 14 - Exprimer $\Pr[Y = +1]$ et $\Pr[Y = -1]$.
- 15 - Exprimer $E[Y]$, $F_Y(y)$ et $f_Y(y)$.

Soit maintenant deux VA U et V gaussiennes centrées réelles d'écart type σ et de coefficient de corrélation ρ . Leur densité de probabilité conjointe est :

$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{1-\rho^2}\right)$$

On pose

$$\mathcal{P} = \Pr[U > 0; V > 0]$$

- 16 - Exprimer \mathcal{P} en fonction de $f_{UV}(u, v)$ sous forme d'une intégrale.
- 17 - Exprimer $\Pr[U < 0; V < 0]$ en fonction des données du problème, puis exprimer $\Pr[UV < 0]$ et $\Pr[U > 0; V < 0]$.
- 18 - [question plus difficile : un certain nombre de questions suivantes n'utilisent pas le résultat de cette question]. Dans cette question *uniquement* on suppose que les variables aléatoires sont décorrélées. Que peut-on dire de la densité de probabilité conjointe $f_{UV}(u, v)$. Donner la valeur numérique de \mathcal{P} puis de $\Pr[(V, U) \in S(\theta_0; \Delta\theta)]$, où $S(\theta_0; \Delta\theta)$ est le secteur angulaire délimité par les angles θ_0 et $\theta_0 + \Delta\theta$, avec $0 < \Delta\theta < 2\pi$ et $\forall \theta_0$, comme indiqué sur la figure 3 :

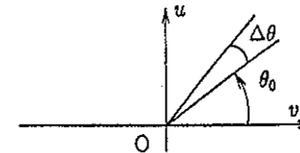


Figure 3 : Secteur angulaire $S(\theta_0, \Delta\theta)$

Dans le cas général où les variables U et V ne sont pas décorrélées, on considère le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} s = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (u - \rho v) \\ r = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} v \end{cases}$$

- 19 - Quelle est l'image par cette transformation du quadrant $u > 0$ et $v > 0$.
- 20 - Exprimer $f_{RS}(r, s)$ en fonction de $f_{UV}(u, v)$. Puis donner son expression littérale. On pourra remarquer pour cela que

$$u^2 + v^2 - 2\rho uv = (u - \rho v)^2 + (1 - \rho^2)v^2$$

Conclure quant à l'indépendance et à la corrélation des VA R et S .

- 21 - D'après la question précédente, donner *sans calcul* la densité de probabilité marginale de chacune des variables R et S .

22 - En déduire une des expressions de \mathcal{P} suivantes :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \text{Arccos}(\rho) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arcsin}(\rho) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arctan} \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

Soit $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien, stationnaire au sens large, réel et centré, de fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$. On considère un limiteur saturé dont la sortie est donnée par :

$$y(t) = \text{signe}(x(t)) = \begin{cases} +1, & \text{si } x(t) \geq 0 \\ -1, & \text{si } x(t) < 0 \end{cases}$$

L'objectif de la suite de cet exercice est d'obtenir en fonction de la fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$ celle du signal aléatoire $y(t)$.

23 - Calculer l'espérance $E[y(t)]$.

24 - En décomposant les 4 cas (selon les signes respectifs de $x(t)$ et $x(t-\tau)$), et en raisonnant par symétrie, montrer que :

$$E[y(t)y(t-\tau)] = 4\mathcal{P} - 1$$

où \mathcal{P} est défini par : $\mathcal{P} = \text{Pr}[x(t) > 0; x(t-\tau) > 0]$.

25 - En utilisant les résultats précédents, montrer que :

$$\gamma_{yy}(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left(\frac{\gamma_{xx}(\tau)}{\gamma_{xx}(0)} \right)$$

UE IST-451 SI

Éléments de correction de l'examen partiel du 2 novembre 2005

Ce document regroupe des éléments de correction de l'examen partiel. Cela ne constitue pas une correction complète.

Exercice I : redresseur mono-alternance

$$1 - \begin{cases} F_Y(y) = 0, & \text{si } y < 0 \\ F_Y(y) = F_X(y), & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

$$2 - F_Y(0^-) = 0 \text{ et } F_Y(0^+) = F_X(0^+) = F_X(0) = \Pr[X \leq 0], \text{ comme } X \text{ est continue.}$$

$$3 - \begin{cases} f_Y(y) = 0, & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) = f_X(y), & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

4 - A cause de la discontinuité de la fonction F_Y en $y = 0$, d'amplitude $F_X(0) - 0$, la densité de probabilité f_Y présente une impulsion de Dirac de poids $\Pr[X \leq 0] = F_X(0)$ en $y = 0$.

$$5 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} [F_X(0)\delta(y) + f_X(y)] dy = F_X(0) + \int_0^{+\infty} f_X(y) dy = F_X(0) + 1 - F_X(0) = 1.$$

$$6 - f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$7 - \Pr[X \leq 0] = \frac{1}{2}.$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}\right) u(y), \text{ avec } u(y) \text{ la fonction d'Heavyside.}$$

$$8 - E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} y \delta(y) dy}_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_0^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}\right) dy. \text{ Le changement de va-}$$

$$\text{riable } u = \frac{y^2}{2\sigma_X^2} \text{ sur la deuxième intégrale donne : } E[Y] = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-u) du = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}} [-e^{-u}]_0^{+\infty} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}$$

$$9 - E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} y^2 \delta(y) dy}_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}\right) dy = \frac{\sigma_X^2}{2}, \text{ par définition}$$

de la variance de la variable aléatoire X .

$$10 - \sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \sigma_X^2.$$

Exercice II : Autocorrélation d'un limiteur saturé

$$11 - X \text{ est centrée donc } E[X] = 0.$$

$$12 - f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$13 - \Pr[X < 0] = \Pr[X > 0] = \frac{1}{2}, \text{ et } \Pr[X = 0] = 0, \text{ comme } X \text{ est continue.}$$

$$14 - \Pr[Y = +1] = \Pr[X > 0] = \frac{1}{2} \text{ et } \Pr[Y = -1] = \Pr[X < 0] = \frac{1}{2}.$$

$$15 - E[Y] = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(+1) = 0,$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < y \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < y \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y+1) + \frac{1}{2}\delta(y-1).$$

$$16 - \mathcal{P} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_{UV}(u, v) du dv.$$

$$17 - \text{Comme } f_{UV}(-u, -v) = f_{UV}(u, v), \Pr[U < 0; V < 0] = \mathcal{P}.$$

$$\text{Comme } f_{UV}(u, -v) = f_{UV}(-u, v),$$

$$\Pr[UV < 0] = 1 - 2\mathcal{P}.$$

$$\Pr[U > 0; V < 0] = \Pr[U < 0; V > 0] = \frac{1}{2}\Pr[UV < 0] = \frac{1}{2}(1 - 2\mathcal{P})$$

18 - Les variables aléatoires U et V sont décorrélées et gaussiennes, donc indépendantes. La densité de probabilité conjointe est donc égale au produit des densités de probabilité marginales $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$.

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} f_U(u) du \times \int_0^{+\infty} f_V(v) dv = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Comme les variables aléatoires U et V sont indépendantes et de même écart type, il y a isotropie des probabilités dans le plan (U, V) . $\Pr\{(U, V) \in \mathcal{S}(\theta_0; \Delta\theta)\}$ est donc proportionnel à l'angle de ce secteur angulaire :

$$\Pr\{(U, V) \in \mathcal{S}(\theta_0; \Delta\theta)\} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$19 - \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \text{ correspond au secteur délimité par les inégalités } \begin{cases} r > 0 \\ s > -\frac{\rho r}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{cases}$$

20 - On utilise la relation de changement de variables aléatoires dans le cas bijectif :

$$f_{RS}(r, s) = f_{UV} \left(\sigma\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2} + r\sigma\rho\sqrt{2}, r\sigma\sqrt{2} \right) \times |J|^{-1}$$

$$\text{avec } |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} & \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}$$

soit $f_{RS}(r, s) = \frac{1}{\pi} \exp(-r^2 - s^2)$. f_{RS} est un produit de fonctions dépendantes respectivement de r et s . Les variables R et S sont indépendantes, elles sont donc décorrélées.

21 - La densité conjointe f_{RS} peut se décomposer en produit de deux fonctions séparables exponentielles. Les variables aléatoires R et S ayant même rôle, les constantes sont identiques pour les densités marginales :

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) \text{ et } f_R(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-r^2).$$

$$\text{Par calcul et par définition, on pourrait obtenir } f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{RS}(r, s) ds = \frac{1}{\pi} \exp(-r^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2) ds.$$

$$\text{Soit } f_R(r) = \frac{1}{\pi} \exp(-r^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-r^2).$$

$$\text{De la même manière } f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2).$$

22 - La probabilité \mathcal{P} est liée à l'angle α défini par la figure 1 : $\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, avec $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\alpha > 0$ si $\rho < 0$ et $\alpha < 0$ si $\rho > 0$. Dans les deux cas, on a les 3 relations suivantes : $\tan \alpha = -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$,

$$\sin \alpha = -\rho \text{ et } \cos \alpha = \sqrt{1-\rho^2}.$$

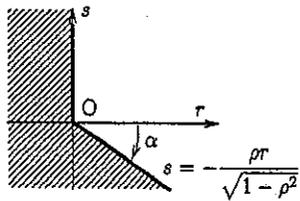


Figure 1 : Secteur angulaire

Donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \alpha \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arcsin} \rho \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos} \rho \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \text{Arccos} \rho \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arctan} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}
 \end{aligned}$$

23 - $E[y(t)] = 0$.

24 - Les valeurs du signal aléatoire x aux instants t et $t - \tau$ sont des variables aléatoires. En posant $U = x(t)$ et $V = x(t - \tau)$, on peut utiliser le raisonnement des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
 E[y(t)y(t-\tau)] &= (+1) \times [\text{Pr}\{x(t) > 0, x(t-\tau) > 0\} + \text{Pr}\{x(t) < 0, x(t-\tau) < 0\}] \\
 &\quad + (-1) \times [\text{Pr}\{x(t) < 0, x(t-\tau) > 0\} + \text{Pr}\{x(t) > 0, x(t-\tau) < 0\}]
 \end{aligned}$$

$$E[y(t)y(t-\tau)] = 2 \times \mathcal{P} - (1 - 2 \times \mathcal{P}) = 4 \times \mathcal{P} - 1$$

$$25 - \gamma_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] = 4 \times \frac{1}{2\pi} (\pi - \text{Arccos} \rho(\tau)) - 1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos} \rho(\tau) \right) = \frac{2}{\pi} \times \text{Arcsin}(\rho(\tau))$$

$$\text{avec } \rho(\tau) = \frac{E[x(t)x(t-\tau)]}{\sqrt{E[x^2(t)]E[x^2(t-\tau)]}} = \frac{\gamma_{xx}(\tau)}{\gamma_{xx}(0)}$$

$$\text{Donc } \gamma_{yy}(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left(\frac{\gamma_{xx}(\tau)}{\gamma_{xx}(0)} \right)$$

UE IST-451 - SI

Examen - le 5 janvier 2006

Tous documents interdits, y compris calculatrice et téléphone portable.
Les notations doivent impérativement être respectées. Les réponses aux questions doivent être clairement argumentées mais concises. Les différents exercices sont indépendants, de même que certaines questions.

Exercice 1 : Variables aléatoire

Soit ϕ une variable aléatoire (VA) scalaire et réelle de densité de probabilité (ddp) quelconque. On considère les VA X et Y définies par $X = \cos \phi$ et $Y = \sin \phi$.

1/ Discuter de l'indépendance des VA X et Y .

ϕ est maintenant une VA uniformément répartie entre 0 et π .

2/ Expliciter $f_\phi(\phi)$, ddp de la VA ϕ .

3/ Préciser où se trouvent dans le plan les points correspondants à différentes réalisations du couple aléatoire (X, Y) .

4/ Sans faire de calculs et par un raisonnement simple, préciser la valeur moyenne m_X de la VA X ainsi que le signe de la valeur moyenne m_Y de la VA Y .

On rappelle que $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ et $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

5/ Calculer m_X ainsi que l'écart type σ_X de la VA X .

6/ Calculer m_Y ainsi que $E[Y^2]$ puis σ_Y , écart type de la VA Y .

7/ Discuter de la corrélation des VA X et Y .

Exercice 2 : Filtrage

Tous les signaux considérés sont à temps continu, scalaire et réel.

1/ Question de cours : Qu'appelle-t-on filtre adapté ? Préciser la démarche permettant de déterminer l'expression du filtre adapté (il n'est pas demandé de faire toutes les démonstrations).

2/ Rappeler la formule des interférences (préciser les notations).

3/ Soit $b(t)$ un signal aléatoire stationnaire de puissance finie P_b et densité spectrale de puissance (DSP) $\Gamma_{bb}(f)$. Expliciter P_b en fonction de $\Gamma_{bb}(f)$.

4/ Ce signal est filtré par un filtre linéaire (FL) de réponse en fréquence $H(f)$. Soit $b_f(t)$ le signal en sortie du filtre. Expliciter sa puissance P_{b_f} .

5/ On suppose maintenant que $b(t)$ est un bruit blanc de DSP Γ_0 . Ce signal est filtré par un FL de réponse en fréquence $H(f)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$. Expliciter P_{b_f} , puissance du bruit filtré, en fonction de Γ_0 et $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$. Expliciter ensuite P_{b_f} en fonction de Γ_0 et de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt.$$

6/ Soit $x(t)$ un signal déterministe. Ce signal est filtré par un FL de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soit $y(t)$ le signal en sortie du filtre. Expliciter, sous intégrale, $y(t)$ en fonction du signal d'entrée.

Dans toute la suite $x(t) = u(t) - u(t-T)$, $u(t)$ étant le signal échelon d'Heaviside ($u(t) = 1$ si $t > 0$ et $u(t) = 0$ sinon). Dans un premier temps on suppose que $h(t) = x(T-t)$.

7/ Représenter l'évolution de $x(t)$ puis de $h(t)$. Déterminer l'expression de $y(T)$.

Soit $e(t) = x(t) + b(t)$, où $b(t)$ est un bruit blanc de DSP Γ_0 et $x(t)$ est le signal utile défini précédemment. Le signal $e(t)$ est filtré par le filtre adapté au signal $x(t)$; sa réponse impulsionnelle est alors $h(t) = x(T-t)$. On note $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre, $y(t)$ le signal utile en sortie du filtre et $b_f(t)$ le bruit en sortie du filtre. La puissance du bruit en sortie du filtre est notée P_{b_f} .

8/ Déterminer l'expression de $\rho_{\max} = \frac{y(T)^2}{P_{b_f}}$.

Le filtre adapté est approché par un FL de réponse impulsionnelle $h_{RC}(t) = \frac{T}{\tau} \exp(-t/\tau)u(t)$.

9/ Justifier cette approximation.

10/ Déterminer l'expression de P_{RC} , puissance du bruit en sortie du filtre, ainsi que celle de $y_{RC}(T)$, signal utile en sortie du filtre à l'instant $t = T$.

11/ On pose $\rho_{RC} = \frac{y_{RC}(T)^2}{P_{RC}}$. Quel est le nom de ρ_{RC} ? Exprimer ρ_{RC} en fonction de τ , T et Γ_0 .

La figure 1 représente l'évolution de la fonction $f(x) = 2x(1 - \exp(-1/x))^2$ et la figure 2 un zoom de cette fonction autour du maximum.

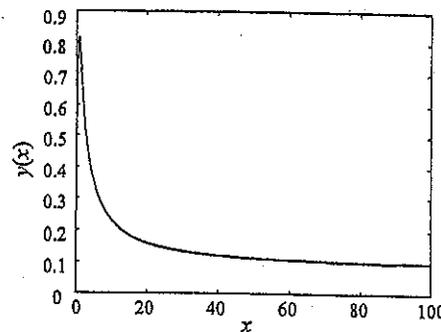


Figure 1 - Évolution de la fonction $y(x)$

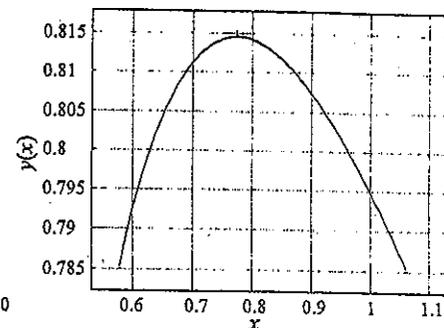


Figure 2 - Zoom

12/ Donner une expression approchée de τ en fonction de T maximisant ρ_{RC} .

13/ On précise que $(1/\sqrt{2})^{1.69} \approx 0,8146$. Préciser la perte en dB de performance due à l'approximation du filtre adapté.

Exercice 3 : Estimateur quadratique

On considère une variable aléatoire (VA) scalaire et réelle Y de densité de probabilité (ddp) conditionnelle

$$f_{Y|X=x}(y) = x \exp(-xy)u(y),$$

où $u(y)$ est le signal échelon d'Heaviside ($u(y) = 1$ si $y > 0$ et $u(y) = 0$ sinon) et X est un paramètre scalaire, réel, inconnu et aléatoire de ddp

$$f_X(x) = \alpha \exp(-\alpha x)u(x),$$

avec $\alpha > 0$ connu. On cherche à estimer le paramètre aléatoire scalaire et positif X à partir de l'observation de la grandeur scalaire Y . On rappelle que l'estimateur bayésien avec coût quadratique \hat{X}_Q est défini par $\hat{X}_Q = E_{X|Y=y}[X]$.

1/ Justifier le signe de α .

2/ Expliciter la valeur moyenne de la VA X .

3/ Expliciter $f_{XY}(x, y)$, ddp conjointe des VA X et Y , puis $f_Y(y)$, ddp marginale de Y .

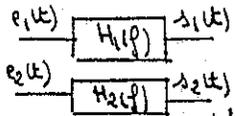
4/ Expliciter $f_{X|Y=y}(x)$, ddp conditionnelle de X sachant que Y est fixé égal à y .

5/ En déduire l'expression de \hat{X}_Q . Calculer ensuite sa moyenne.

[6/ Proposer au moins un autre estimateur bayésien. Comparer ces estimateurs.

1/ cf cours

2/ Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ 2 SA stationnaires, de dsp $\Gamma_{e_1, e_2}(f) = TF[\gamma_{e_1, e_2}(t)]$ avec $\gamma_{e_1, e_2}(t) = E[e_1(t) e_2^*(t-t)]$. Ces 2 SA sont filtrées par des FL de RF $H_1(f)$ et $H_2(f)$. Alors les signaux de sortie de ces FL sont également stationnaires dans leur ensemble et



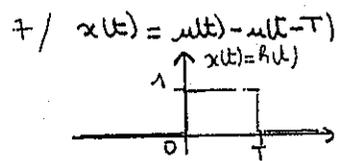
$$\Gamma_{s_1, s_2}(f) = H_1(f) H_2^*(f) \Gamma_{e_1, e_2}(f)$$

3/ $P_b = \gamma_{bb}(0) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \Gamma_{bb}(f) df = P_b$

4/ $P_{b,f} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} |H(f)|^2 \Gamma_{bb}(f) df$

5/ $P_{b,f} = \Gamma_0 \int_{-\sigma}^{+\sigma} |H(f)|^2 df = \Gamma_0 \int_{-\sigma}^{+\sigma} |h(t)|^2 dt$ (car $\Gamma_{bb}(f) = \Gamma_0 \delta(f)$ (d'après le théorème de Parseval))

6/ $y(t) = (h * x)(t) = (x * h)(t) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} h(\theta) x(t-\theta) d\theta = \int_{-\sigma}^{+\sigma} x(\theta) h(t-\theta) d\theta = y(t)$



$R(t) = x(T-t) = x(t)$
 $R(T-\theta) = x(\theta) \rightarrow y(T) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} x^2(\theta) d\theta = T = y(T)$

8/ $P_{b,f} = \Gamma_0 \cdot T \Rightarrow P_{max} = \frac{T}{T_0}$

9/ La fente est approchée par une exponentielle de constante de temps τ . Les deux filtres ont même gain statique : T . Le filtre approché peut être réalisé physiquement (circuit RC+AO), ce qui n'est pas le cas du filtre adapté de RI $R(t)$.

10/ $P_{RC} = \Gamma_0 \int_{-\sigma}^{+\sigma} \frac{T^2}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\Gamma_0 T^2}{2\tau} = P_{RC}$

$y_{RC}(T) = \frac{T}{\tau} \int_0^T e^{-\theta/\tau} x(T-\theta) d\theta$
 $= \frac{T}{\tau} \int_0^T e^{-\theta/\tau} d\theta$
 $= T(1 - e^{-T/\tau}) = y_{RC}(T)$

11/ $P_{RC} = RSB$ en sortie FL.
 $= \frac{2\tau(1 - e^{-T/\tau})^2}{\Gamma_0}$

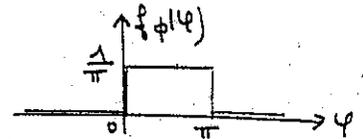
12/ soit $x = \frac{T}{\tau} \Rightarrow P_{RC} = P_{max} 2x(1 - e^{-1/x})^2 \rightarrow$ maximum pour $x = 0,78 T$

13/ $P_{RC} |_{max} = 0,8146 P_{max} \rightarrow$ fente $= 0,8146 \rightarrow$ en dB $= 10 \log_{10} 0,8146$
 $= 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1,69}$
 $\approx \frac{1}{2} \frac{-3,01}{1,69} \frac{1}{1,70} \frac{-10}{10} = -0,81$

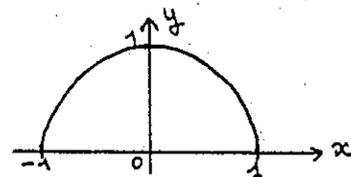
Variables aléatoires

1/ $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ les VA x et y ne sont pas indépendantes.

2/ $f_\phi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } \psi \in [0, \pi) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



3/



Les points appartiennent au demi-cercle supérieur représenté sur la figure à contre et, si le nombre de réalisations est infini, les points sont uniformément répartis le long de ce demi-cercle.

4/ La répartition des points est symétrique par rapport à l'axe Oy ainsi

$m_x = 0$
 $\cdot y \geq 0 \rightarrow m_y \geq 0$

5/ $m_x = E[\cos \phi] = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \cos \psi f_\phi(\psi) d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \sin \psi \Big|_0^\pi = 0 = m_x$

$\cdot \sigma_x^2 = E[(\cos \phi - m_x)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos 2\psi) d\psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin 2\psi \Big|_0^\pi = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6/ $m_y = E[\sin \phi] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi} \omega \psi \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} = m_y > 0$

$\cdot E[y^2] = E[\sin^2 \phi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2\psi) d\psi = \frac{1}{2} = E[y^2]$

$\cdot \sigma_y^2 = E[y^2] - m_y^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}$

7/ La répartition des points étant symétrique par rapport à l'axe Oy , on peut prouver que les VA x et y sont décorrélées. En effet $E[XY] = E[\cos \phi \sin \phi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin 2\psi d\psi = \frac{1}{4\pi} \cos 2\psi \Big|_0^\pi = 0 = E[X]E[Y]$
 $\rightarrow P_{xy} = 0$ et les VA x et y sont décorrélées.

≡

$$1/ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \rightarrow \alpha > 0$$

$$2/ m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{\alpha} dx = \frac{x e^{-\alpha x}}{-\alpha} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} = m_X$$

$$3/ f_{X|Y}(x, y) = f_{Y|X}(y) f_X(x) = \alpha x e^{-(\alpha+y)x} \mu(x) \mu(y) = f_{X,Y}(x, y)$$

$$f_{Y|X}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \frac{\alpha}{\alpha+y} \mu(y) \int_0^{+\infty} (\alpha+y)x e^{-(\alpha+y)x} dx = \frac{\alpha}{(\alpha+y)^2} \mu(y) = f_Y(y)$$

$$= \frac{1}{\alpha+y} \text{ d'après 2/}$$

$$4/ f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{(\alpha+y)^2 x e^{-(\alpha+y)x} \mu(x)}{\frac{\alpha}{\alpha+y} \mu(y)} = f_{X|Y=y}(x)$$

$$5/ \hat{X}_Q = E[X|Y=y] = E_{X|Y=y}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx = (\alpha+y)^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(\alpha+y)x} dx$$

$$= (\alpha+y) \underbrace{x^2 e^{-(\alpha+y)x} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+y)} x e^{-(\alpha+y)x} dx \rightarrow \hat{X}_Q = \frac{2}{\alpha+y}$$

$$= \frac{1}{\alpha+y} \text{ d'après 2/}$$

$$E[\hat{X}_Q] = E[E_{X|Y=y}[X]] = E[X] = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \text{estimateur non biaisé}$$

$$\text{vérification } E[\hat{X}_Q] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\alpha+y} f_Y(y) dy = 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+y)^3} dy = \frac{2}{(\alpha+y)^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} = E[X]$$

$$6/ \text{Par exemple: } \hat{X}_{MAP} = \arg \max_x f_{X|Y=y}(x) \rightarrow \frac{d f_{X|Y=y}(x)}{dx} = 0 \rightarrow$$

$$\hat{X}_{MAP} = \frac{1}{\alpha+y} \rightarrow E[\hat{X}_{MAP}] = \frac{1}{2\alpha} \neq m_X \rightarrow \text{estimateur biaisé}$$

$$\tilde{X} = \hat{X} - X \quad E[\tilde{X}] = \text{biais} = m_{\tilde{X}} \quad \sigma_{\tilde{X}}^2 = E[\tilde{X}^2] - m_{\tilde{X}}^2 \quad E\tilde{X} = E[\hat{X} - X]$$

$$E[\tilde{X}^2] = E\left[\left(\frac{2}{\alpha+y} - X\right)^2\right] = 4E\left[\frac{1}{(\alpha+y)^2}\right] - 4E\left[\frac{X}{\alpha+y}\right] + E[X^2]$$

$$\text{or } E\left[\frac{X}{\alpha+y}\right] = E\left[\frac{1}{\alpha+y} E_{X|Y=y}[X]\right] = E\left[\frac{1}{\alpha+y} \hat{X}_Q\right] = 2E\left[\frac{1}{(\alpha+y)^2}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{(\alpha+y)^2}\right] = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+y)^4} dy = \frac{\alpha}{3} \frac{1}{(\alpha+y)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3\alpha^2}$$

$$E[X^2] = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2} \text{ (d'après expression } \hat{X}_Q)$$

$$\rightarrow \sigma_{\tilde{X}}^2 = E\tilde{X} = \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2\right) \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{3\alpha^2} = E\tilde{X} \rightarrow \sigma_{\tilde{X}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\alpha}$$

Rappel: par définition $E\tilde{X} = 0$ + $m_{\tilde{X}} = 0$

$$E[\hat{X}_{MAP}] = -\frac{1}{2\alpha} = m_{\hat{X}_{MAP}}$$

$$E[\tilde{X}_{MAP}^2] = E\left[\frac{1}{(\alpha+y)^2} - \frac{2X}{\alpha+y} + X^2\right] = \frac{1}{\alpha^2} = E\tilde{X}_{MAP} > E\tilde{X}_Q$$

$$\sigma_{\tilde{X}_{MAP}}^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\alpha^2} = \frac{3}{4\alpha^2} \rightarrow \sigma_{\tilde{X}_{MAP}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\alpha} > \sigma_{\tilde{X}_Q}$$

$\rightarrow \hat{X}_Q$ meilleur que \hat{X}_{MAP} d'un point de vue biais, $E\tilde{X}$, $\sigma_{\tilde{X}}$

$$\text{or: } \hat{X}_{II} = \int_{-\infty}^{\hat{X}_{II}} x f_{X|Y=y}(x) dx = \int_{\hat{X}_{II}}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx \rightarrow \text{pas de solution analytique}$$

